# Concursul Fractal

A Șasea Ediție, 21 Septembrie 2025

**Problema 1.** Marius și Alexandru joacă un joc. Pe o foaie de hârtie este scris numărul 777. Pe rând, aceștia scad din numărul scris pe foaie o cifră nenulă a sa și înlocuiesc numărul cu rezultatul obținut. De exemplu, dacă pe foaie ar fi scris numărul 123, cel care mută ar putea lăsa pe foaie numerele $123 - 3 = 120$, $123 - 2 = 121$ și $123 - 1 = 122$. Câștigă acel jucător care scrie 0 pe foaie după mutarea ta. Dacă Marius este primul care scade cifra din numărul scris, cine va cășțiga?

**Soluție:** Vom rezolva problema pentru orice număr inițial în loc de 777, și anume vom arăta că Marius câștigă dacă și numai dacă primul număr (fie acesta $n$) nu este divizibil la 10. Vom arăta aceasta prin inducție după $n$. Dacă primul număr este 1, evident Marius câștigă. Acum, dacă primul număr este $n$, pentru $n$ nedivizibil la 10, el poate să scadă din acesta ultima cifră a sa, și obține un număr mai mic decât $n$, ultima cifră a căruia este 0, deci pentru care Alexandru pierde. Dacă $n$ are ultima cifră 0, indiferent de ce scade Marius, Alexandru o să obțină un număr care nu este divizibil la 10 mai mic decât $n$ deci o să poată câștiga.

**Problema 2.** Fie triunghiul $ABC$ cu centrul de greutate $G$. Dreapta $BG$ intersecteaza segmentul $AC$ în $M$. Punctul $D$ apartine segmentului $BC$ astfel încât $MD$ este bisectoarea unghiului $BMC$. Dacă punctele $A$, $G$ și $D$ sunt coliniare, demonstrați că triunghiul $ABC$ este dreptunghic.

**Soluție:** Faptul că punctele $A$, $G$ și $D$ sunt coliniare înseamnă că punctul $D$ aparține dreptei $AG$ care este mediana dusă din vârful $A$, deci $D$ este mijlocul laturii $BC$. În triunghiul $BMC$, bisectoarea dusă din vârful $M$ și mediana coincid, deci triunghiul este isoscel cu $MD$ fiind perpendiculară pe $BC$. În triunghiul $ABC$, $MD$ este linie mijlocie, deci faptul că $MD$ e perpendiculară pe $BC$ înseamnă că și $AB$ este perpendiculară pe $BC$, deci unghiul $B$ este drept.

**Problema 3.** Fie $a, b$ și $c$ trei numere naturale și fie $d$ cel mai mare divizor comun al numerelor $a^2 + bc,\ b^2 + ac$ și $c^2 + ab$. Arătați că suma divizorilor lui $d$ este impară.

**Soluție:** Vom arăta că acest divizor comun are forma $2x^2$ sau $x^2$ pentru un $x$ natural. Într-adevăr, dacă $a, b$ și $c$ ar avea un divizor comun $t$ putem pune $(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}, \frac{c}{t})$ în loc de $(a, b, c)$ și concluzia rămâne aceeași. Deci putem asuma că ele sunt coprime. Acum vom arăta că pentru orice $a$, $b$ și $c$ care nu au toate un divizor comun, cel mai mare divizor al celor trei numere este o putere de 2 (de fapt el e sau 1 sau 2 dar e suficient să arătăm că e putere de 2). Într-adevăr, asumând că există un prim impar $p$ care divide cele trei numere avem $a^2 \equiv -bc \mod p$; $b^2 \equiv -ac \mod p$; $c^2 \equiv -ab \mod p$, și înmulțind cele trei relații avem că $(abc)^2 \equiv -(abc)^2 \mod p$, deci $p$ divide $2(abc)^2$, ce nu e posibil. Astfel, avem că cel mai mare divizor comun este o putere de 2 înmulțită cu un pătrat perfect. Fie acesta $2^a m^2$ unde $m$ este impar. Pentru a arăta că suma divizorilor e impară e suficient să arătăm că numărul de divizori impari este impar. Cu toate acestea, orice divizor impar al lui $2^a m^2$ îl divide pe $m^2$, deci vrem să arătăm că $m^2$ are un număr impar de divizori, ce e evident fiindcă pentru orice divizor $d$ al acestuia, $\frac{m^2}{d}$ la fel este un divizor, astfel orice divizor $d$ are o pereche $\frac{m^2}{d}$, cu excepția lui $m$, deci avem un număr impar de divizori.

**Problema 4.** Fie $S$ un set ce conține polinoame cu următoarele proprietăți:

1. Dacă $P(x) \in S$, atunci $P(x)^2 \in S$.
2. Dacă $P(x), Q(x) \in S$, atunci $P(x) - Q(x) \in S$.

Arătați că dacă setul conține un polinom de grad 45 și alt polinom de grad 99, el conține un polinom de grad 2025.

**Soluție:** Dacă avem două polinoame $P(x)$ și $Q(X)$ care aparțin setului, $P(x)-Q(x)$ aparține setului, deci $(P(x)-Q(x))^2$ aparține setului, deci $(P(x)-Q(x))^2 - P(x)^2$ aparține și în final avem că $(P(x)-Q(x))^2 - P(x)^2 - Q(x)^2 = -2P(x)Q(x)$ aparține setului, deci dacă avem în set un polinom de grad $d_1$ și altul de grad $d_2$, avem un polinom de grad $d_1 + d_2$. Concludem că pentru un polinom de grad $a$ și altul de grad $b$ avem în set prin inducție după $m$ polinoame de grad $a + mb$, iar cum $45 + 20 \cdot 99 = 2025$ concluzia urmează.